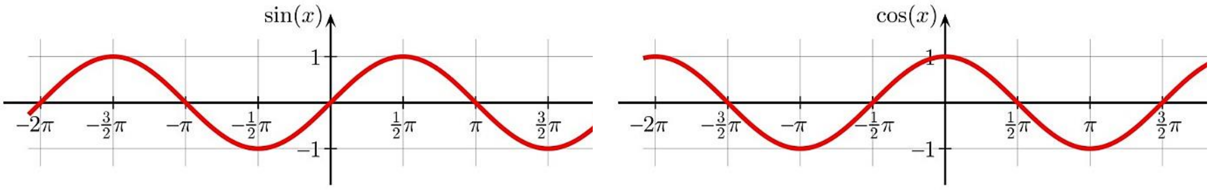
Fourieranalyse für Elektrotechniker

1 Grundsätzliches zur Schwingungslehre

1.1 Zeiger- und Liniendiagramm

Zum Einstieg in die Fourieranalyse ist eine kurze Rekapitulation der Schwingungslehre angezeigt. Als harmonische Schwingung bezeichnet man eine sinusförmige Schwingung, welche durch eine Sinus- oder eine Cosinusfunktionen (Abb. 1-1) beschreibbar ist.



a) Sinusfunktion b) Cosinusfunktion

Abb. 1-1
Harmonische Schwingung

Für den Augenblickswert eines harmonischen Signals gilt:

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)\ ;\ s(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Auf der Abszisse (x-Achse) wird der während der Zeit (t) überstrichene Winkel (φ = ωt) oder nur die Zeit (x = t) eingetragen werden.

Als Kreisfrequenz[1] (ω) bezeichnet man den pro Zeiteinheit überstrichenen Winkel im Zeigerdiagramm (Abb. 1-2).

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\ [s^{-1}]\ ;\ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f := Frequenz [Hz]
T := Periode [s]

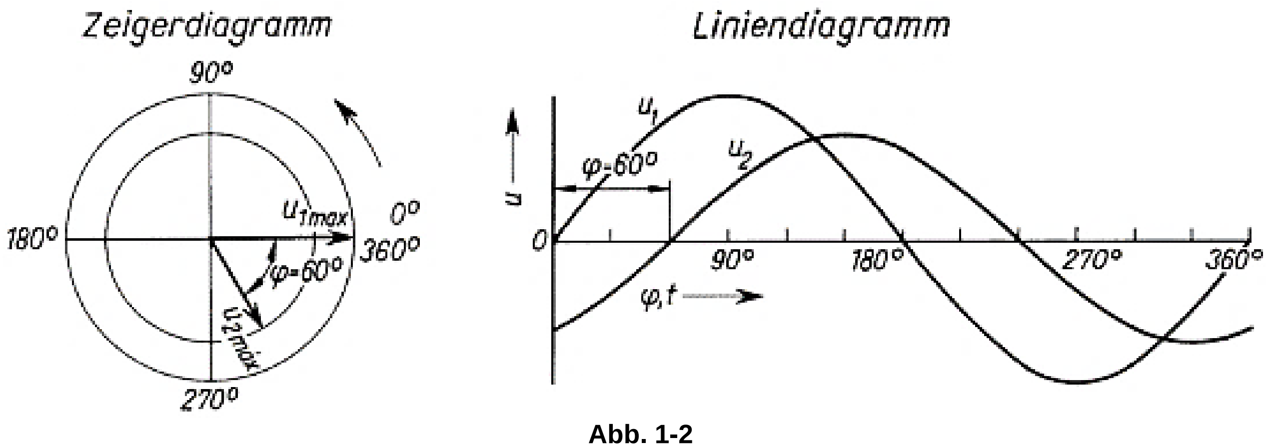


Abb. 1-2
Zeiger- und Liniendiagramm von zwei phasenverschobenen Wechselspannungen mit unterschiedlicher Amplitude aber gleicher Frequenz[2]

Winkel werden in Funktionsgleichungen nicht in Grad, sondern im Bogenmaß (Radiant) angegeben.

[1] Die Kreisfrequenz wird in der Mechanik als *Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet.
[2] Hille, Schneider: Fachkunde für Elektroberufe (Springer).

$\varphi = \omega t\ [rad]\ ;\ 1\ rad\ \triangleq 360°/2\pi\ \approx 57{,}3°$

Unter dem Nullphasenwinkel (φ_0) versteht man die zeitlliche Verschiebung eines Signals auf der x-Achse. Bezugspunkt ist der Koordinatennullpunkt. Ein positiver Nullphasenwinkel bedeutet eine Verschiebung nach links, ein negativer Nullphasenwinkel eine Verschiebung nach rechts.

In Abb. 1-2 beträgt die Phasenverschiebung zwischen den Spannungen u_1 und u_2 genau 60°. Weil u_1 zur Zeit $t_{u1} < t_{u2}$ startet, ist $u_1 = f(t,\varphi)$ gegenüber $u_2 = f(t,\varphi)$ vorauseilend.

Bei nichtharmonischen Schwingungen (Abb. 1-3) wird anstelle der Frequenz oft die Kreisfrequenz angegeben.

$\omega_0 = 2\pi f$ 1. Harmonische (Grundkreisfrequenz)

$\omega_1 = 2 \cdot \omega_0$ 2. Harmonische (1. Oberschwingung)

$\omega_2 = 3 \cdot \omega_0$ 3. Harmonische (2. Oberschwingung)

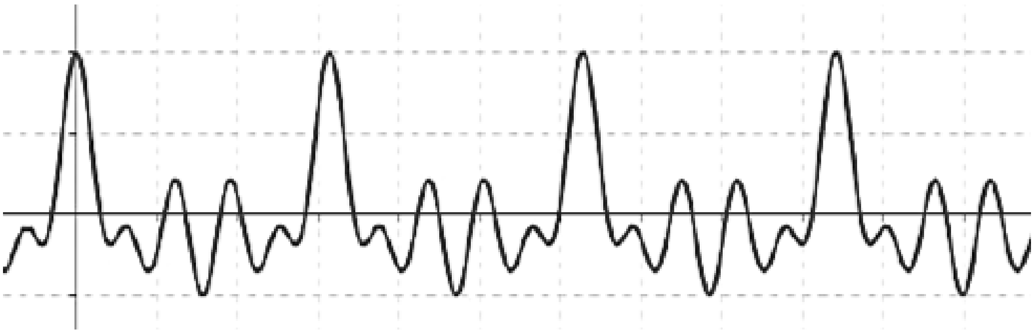


Abb. 1-3
Zeitperiodisches Signal

Durch die im Signal enthaltenen Harmonischen mit unterschiedlicher Amplitude und Frequenz ist der zeitliche Verlauf nicht mehr sinusförmig.

1.2 Superpositionsprinzip

In der linearen Schwingungslehre gilt das Prinzip der ungestörten Überlagerung (auch *Superpositionsprinzip* genannt). Darunter versteht man die Überlagerung physikalisch gleicher Grössen ohne gegenseitige Behinderung.

Mathematisch lässt sich eine Superposition als Linearkombination darstellen.

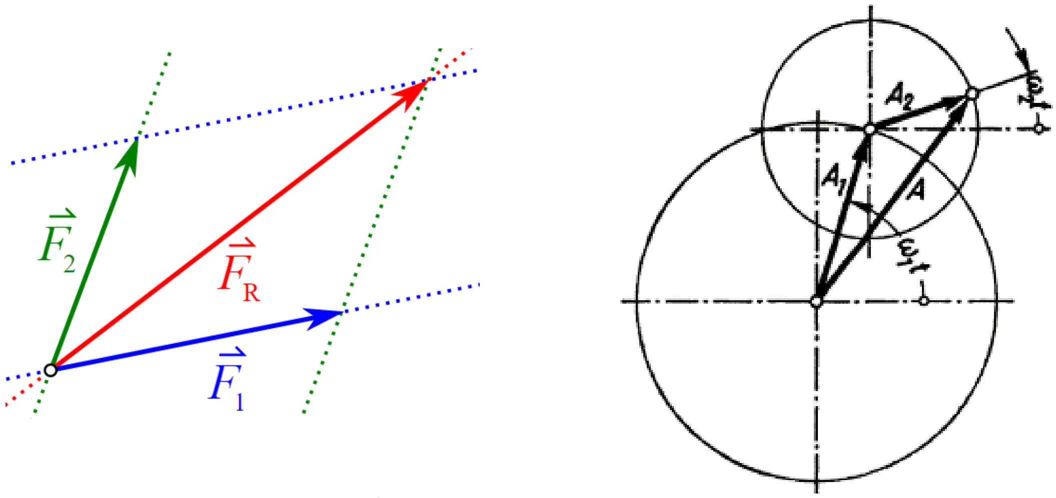
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t)$$

Die Summenformel besagt, dass beliebige Funktionen oder Größen derselben Art zu einer neuen Größe addiert werden können. Aus der Mechanik ist diesbezüglich das Prinzp der "resultierenden Kraft" – geometrisch ein Kräftevieleck (Abb. 1-4a) – bekannt.

In adäquater Weise lassen sich elektrische Signale überlagern (Abb. 1-4b).

$A_{res} = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$

Die Drehzeiger, aus denen sich der resultierende Zeiger (A) zusammensetzt, bleiben erhalten.



a) Addition von Kräften[3]

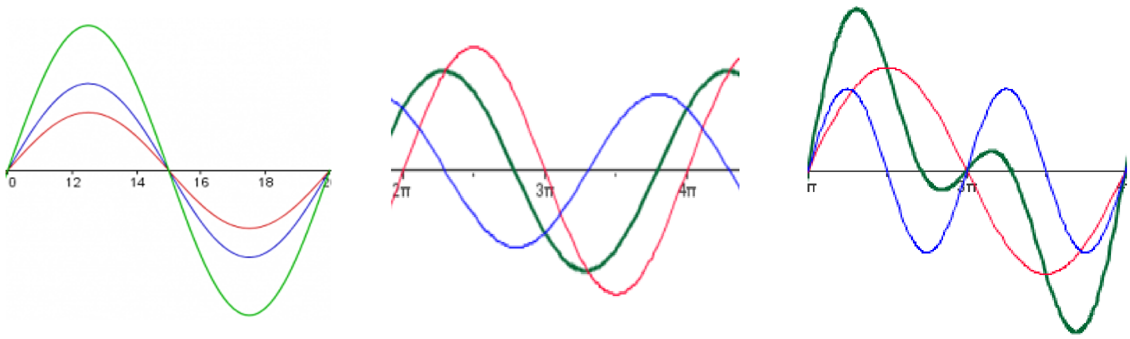
b) Addition zweier Schwingungen verschiedener Frequenz[4]

Abb. 1-4
Geometrische Addition physikalischer Grössen

Wir unterscheiden drei exemplarische Fälle der Superposition (Abb. 1-5).

a, b) Aus der Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz resultiert eine harmonische Schwingung derselben Frequenz. Die Amplitude wird maximal, wenn die Teilschwingungen phasengleich sind und minimal bei einer Phasenverschiebung von 180°. Löschen sich die Amplituden aus, so ist von destruktiver Interferenz die Rede.

c) Bei der Superposition von π-periodischen Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis ist die resultierende Schwingung nicht länger harmonisch. Die Frequenz des resultierenden Signals entspricht der Frequenz der fundamentalen Schwingung.



a) Phasengleiche Schwingungen gleicher Frequenz

b) Phasenungleiche Schwingungen gleicher Frequenz

b) Schwingungen mit Nullphase und ganzzahligem Frequenzverhältnis

Abb. 1-5
Superposition harmonischer Schwingungen (resultierende Schwingung in grün)[5]

[3] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/
[4] K. Magnus: Schwingungen (Teubner).
[5] Bildquelle: http://schulphysikwiki.de/

2 Grundsätzliches zur Fourieranalyse

Beliebig oft differenzierbare Funktionen lassen sich bekanntlich in eine unendliche Reihe von Potenzfunktionen entwickeln.

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Von besonderem Interesse für den Ingenieur sind Funktionen, die sich an einer bestimmten Stelle durch wenige Summanden approximieren lassen.

Es stellt sich unweigerlich die Frage, ob die Entwicklung in eine unendliche Reihe auch für andere Funktionen möglich ist. Die Beantwortung dieser Frage führt uns zu den trigonometrischen Reihen, die 1753 von Daniel Bernoulli bei seiner Behandlung der schwingenden Saite eingeführt wurden.

Ein kleiner Exkurs in die Trigonometrie sei an dieser Stelle gestattet. Bekanntlich lassen sich Sinusfunktionen in Cosinusfunktionen verwandeln und umgekehrt. Aus dem Additonstheorem trigonometrischer Funktionen geht hervor, dass sich jede Sinusfunktion als Summe elementarer Funktionen beschreiben lässt.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\varphi \cdot \cos\omega t + \cos\varphi \cdot \sin\omega t$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \lambda \cdot \cos\omega t + \mu \cdot \sin\omega t \mid \lambda = \sin\varphi \,;\, \mu = \cos\varphi$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass die Nullphasenwinkel verschwinden, so dass die trigonometrische Reihe schliesslich folgende Form annimmt:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \,;\; k = 1, 2, 3, \dots$$

Die Einführung solcher Reihen durch mathematische Physiker benötigte Zeit, um sich in Physik und Technik durchzusetzen.

Anm.: Brook Taylor, welcher 1713 als erster eine Lösung für die schwingende Saite angab, behandelte nur die Grundschwingung. Er erkannte aber bereits, dass eine beidseitig eingespannte Saite der Länge L nebst ihrem Grundton auch Töne einer L/2 oder L/3 oder L/4 usw. langen Saite zu erzeugen vermochte. Diese Moden werden als Harmonische bezeichnet. Doch wie konnten auf einer einzigen Saite zugleich mehrere Töne entstehen? Euler fügte mit seinen Arbeiten *Über Kettenbrüche* (1737) und *Über die Schwingungen einer Saite* (1748) weitere Erkenntnisse hinzu, indem er gedanklich die Eigenschwingungen eines mit Perlen besetzten masselosen elastischen Fadens untersuchte. Jean Baptiste Le Rond d'Alembert fand (vom Taylor'schen Theorem ausgehend, dass die beschleunigende Kraft bei der Auslenkung einer Saite der Krümmung proportional ist) die passende Wellengleichung (1747, 1749). Aber erst Daniel Bernoulli zeigte 1753, dass die Moden der frei schwingenden Saite als trigonometrische Reihe darstellbar waren. Der sich daraus ergebende Disput zwischen Euler, d'Alembert und Bernoulli erstreckte sich über Jahre. Eigentlich eine Satire, ganz im Sinne: Keiner will die Einsichten des anderen studieren. Danach gelang Lagrange der entscheidende Nachweis, wie man durch Grenzübergang von der Lösung des Problems der Schwingungen einer Perlenschnur zur Lösung des Problems der Schwingungen einer homogenen Saite gelangt.[6]

Einem grösseren Leserkreis bekannt wurden die später als *Fourierreihen* bezeichneten Reihen durch die Arbeiten von Jean Baptist Joseph Fourier (1768-1830), der sich seit 1805 mit dem Problem der Wärmeleitung in dünnen Stäben befasste. In einem Aufsatz[7] gelangte Fourier zur Überzeugung, dass jede noch so komplizierte Funktion in eine Reihe von Sinusfunktionen entwickelt werden kann. Fourier veröffentlichte seine Erkenntnisse 1822 in Buchform unter dem Titel *Theorie analytique de la chaleur*. Die Brisanz der Fourier'schen Theorie gipfelte in der Aussage: "Ich habe allgemein gezeigt, dass jede arbiträre Function, wenn sie nur überall bestimmte Werte besitzt, mag sie sonst in ihrem Verlauf eine stetig gekrümmte Curve oder solche eckige Figuren wie Dreiecke oder Trapeze vorstellen, sich durch convergente trigonometrische Reihen oder durch bestimmte Integrale ausdrücken lässt."[8] Seinerzeit rief diese kühne Behauptung erhebliche Skepsis unter den Zuhörern hervor. Fouriers Ansatz wurde zunächst durch die Arbeiten von Paul Du Bois-Reymond gedämpft. Letzterer hatte 1876 vor Augen geführt, dass Stetigkeit allein für die Konvergenz der Fouriereihe nicht ausreicht. Bernhard Riemann und weitere namhafte Mathematiker vermochten aber aufzuzeigen, dass sich unter gewissen Voraussetzungen jede periodische Funktion in eine unendliche Reihe von Sinusschwingungen entwickeln lässt.

Die nach Dirichlet benannten Bedingungen der Konvergenzkriterien für Fourierreihen sind erfüllt, wenn:

- f(t) beschränkt ist, also nicht exponentiell ist und keine Polstellen besitzt
- f(t) im Intervall [0, T] endlich viele Sprungstellen mit links- und rechtsseitig bestimmbarem Grenzwert besitzt
- f(t) bis auf endlich viele Stellen stetig und daher differenzierbar ist.

Oft ist es ausreichend, die Fourierreihe nach einigen Gliedern abzubrechen. Den resultierenden Ausdruck bezeichnet man als *Fourierpolynom* vom Grad n (wobei sich dieser Ausdruck nicht auf die höchste vorkommende Potenz, sondern auf das höchste ganzzahlige Vielfache der Kreisfrequenz bezieht).

Aus nachvollziehbaren Gründen substituiert man $\omega_0 t$ gelegentlich durch x, wodurch die Rechnung vereinfacht wird:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + \ b_k \sin(kx)] \qquad \text{Gl. (1)}$$

An allen Stellen, an denen die Funktion stetig ist, konvergiert die Reihe gegen den Funktionswert $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert. Das zeitunabhängige Glied a_0 wird als *Gleichanteil* bezeichnet.

---

[6] Auf den historischen Kontext des Problems der schwingenden Saite gehen z.B. Heuser (Gewöhnliche Differentialgleichungen) und Szabo (Geschichte der mechanischen Prinzipien) näher ein.
[7] J.B. Fourier: Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solide (1807).
[8] J.B. Fourier: Analytische Theorie der Wärme (Seite 450).

In der Wechselstromtechnik entspricht der Gleichanteil dem linearen Mittelwert (Gleichwert) eines periodischen Signals.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dt$$

Gelegentlich lässt sich der Mittelwert auch direkt aus dem Liniendiagramm (Abb. 2-1) ablesen.

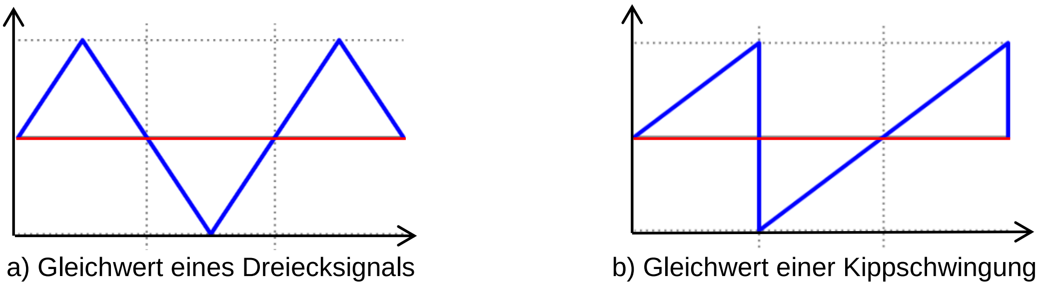


Abb. 2-1
Gleichwert (rote Linie) unipolarer Signale

In Verstärkerschaltungen bedient man sich sog. Koppelkondensatoren, um den Gleichanteil aus einem Mischsignal zu entfernen. Bekanntlich lassen Kondensatoren nur Wechselströme passieren, Gleichströme dagegen werden abgeblockt.

3 Grundsätzliches zur Fouriersynthese

Die Erzeugung nichtsinusförmiger Schwingungen durch Überlagerung harmonischer Schwingungen wird *Fouriersynthese* (Abb. 3-1) genannt. Eine nichtsinusfömige Schwingung wird als *enharmonisch* bezeichnet.

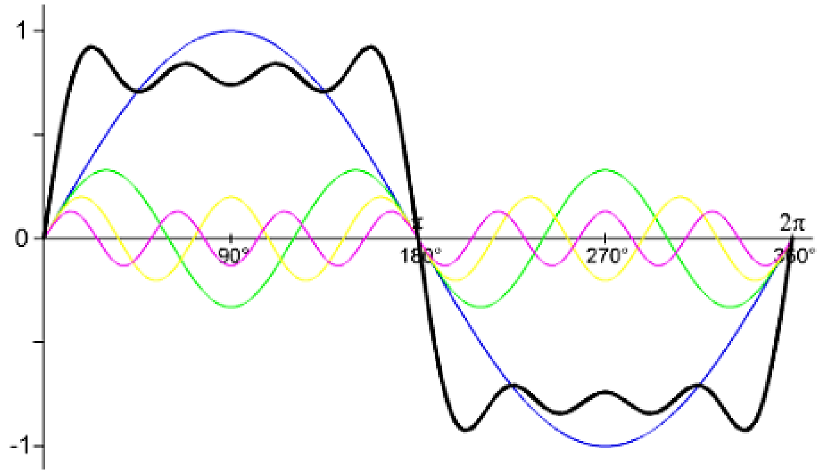


Abb. 3-1
Fouriersynthese

Appoximation eines Rechtecksignals durch ungestörte Überlagerung von Sinusschwingungen.[9]

Töne bspw. bestehen aus Grundschwingung und Oberschwingungen (höhere Harmonische) mit in der Regel schnell abnehmender Amplitude und einem ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz. Grundschwingung und resultierendes Signal besitzen dieselbe Frequenz. Der Grundton bestimmt dabei die Tonhöhe, der Oberwellenanteil den Klang eines Tones.

[9] Bildquelle: http://elektroniktutor.de/

Gewisse Signale bestehen aus ungeradzahligen Oberschwingungen, andere aus geradzahligen. Eine Klarinette bspw. erzeugt vorwiegend ungeradzahlige Obertöne, eine Blockflöte dagegen geradzahlige. Sägezahnschwingungen bestehen aus geraden und ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz. Das eingestrichene c auf einer Geige unterscheidet sich in seinem Spektrum (und damit klanglich) von demjenigen eines Klaviers. Ursache dieser Verschiedenheiten ist die unterschiedliche Bauweise bzw. Geometrie der Instrumente in Verbindung mit unterschiedlichen Werkstoffen und einer unterschiedlichen Spielweise (Streichen und Zupfen von Saiten bei der Geige, Anschlagen von Tasten beim Klavier etc.).

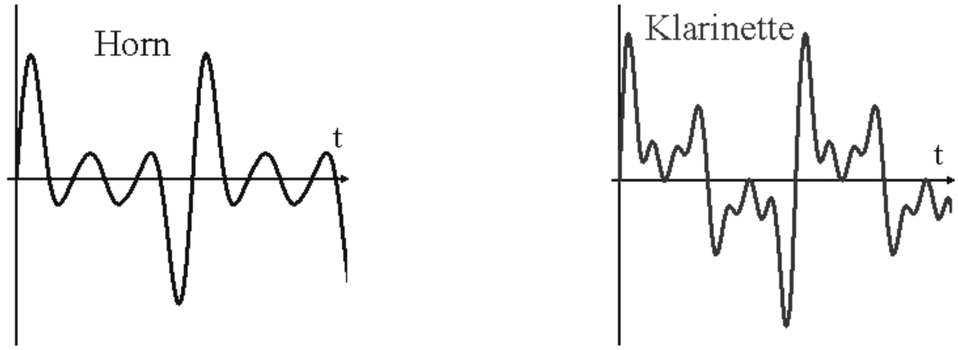


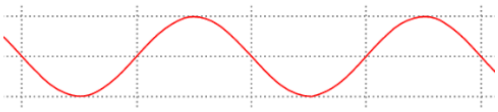
Abb. 3-2
Unterschiedliche Klangbilder bei gleichem Grundton[10]

Anm.: Ohm, der das Fouriertheorem auf die Akustik übertrug, hatte bereits früh Kritik an Seebeck's These der Tonbildung durch Periodizität einer Pulsfolge ausgeübt, indem er festhielt, dass bei einer sinusförmigen Schwingung immer diejenige Tonhöhe als Grundtonhöhe wahrgenommen wird, die der Frequenz der Schwingung entspricht. Seebeck wiederum hielt fest, dass die Anwesenheit einer Sinusschwingung bestimmter Frequenz nicht grundlegend zum Hören einer Tonhöhe dieser Frequenz sei. Ohm ging jedoch davon aus, dass dieses Phänomen der "akustischen Illusion des Ohres" zuzuschreiben sei. Seebeck zeigte sich versöhnlich, indem er erklärte, dass die unterschiedliche Klangfarbe von Tönen gleicher Frequenz nur durch die Zerlegbarkeit der periodischen Schwingung in ihre Sinuskomponenten zu verstehen sei. Mit seinen Schlussfolgerungen hatte Seebeck das Residuum ohne es zu wissen vorweggenommen.[11]

In technischen Systemen gibt es meist keine reinen Sinussignale. Dies macht sich z.B. bemerkbar, wenn beim Zuschalten nichtlinearer Verbraucher die Sinusform des Netzwechselstromes durch Oberschwingungen verzerrt wird. Ausser der Verschiebungsblindleistung durch nichtohmsche Lasten entsteht zusätzlich sog. Verzerrungsblindleistung.

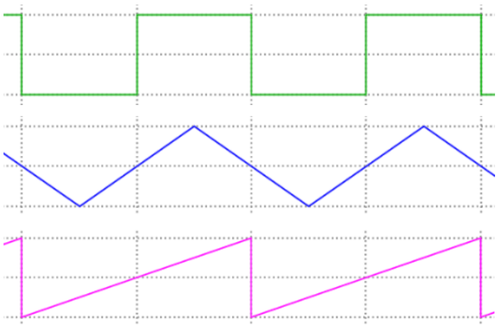
Mit einem Funktionsgenerator lassen sich Testsignale unterschiedlicher Amplitude und Frequenz (Abb. 3-3) erzeugen. Signalgeneratoren, die beliebige Signale erzeugen, heissen "arbiträre Generatoren".

In praxi gibt man ein Testsignal auf den Eingang eines Systemgliedes und schaut, wie das Signal am Ausgang erscheint. Nebst einer Phasenverschiebung kann es zu einer Verformung der Kurvenform und zu messbaren Verzögerungen kommen. Auf diese Weise gelangt man zur Übertragungsfunktion, welche z.B. in der Regelungstechnik von Bedeutung ist.



Sinus → Grundschwingung ohne Oberschwingungen.

[10] Bildquelle: http://www.leifiphysik.de/
[11] C.H. Sunier: Physik der Musikinstrumente (Skript, 2013).



Rechteck → Sinus mit ungeradzahligen Harmonischen.

Dreieck → Sinus mit ungeradzahligen Harmonischen.

Sägezahn → Sinus mit geradzahligen und ungeradzahligen Harmonischen.

Abb. 3-3
Gebräuchliche Testsignale (idealisiert) [12]

Bei steilen Impulsflanken (also dort wo die Funktion Unstetigkeitsstellen besitzt) macht sich das "Gibbs'sche Phänomen" in Form von kleinen Über- resp. Unterschwingern (Abb. 3-4) bemerkbar. Diese auch als "Ringing" bezeichnete Anomalie tritt auf, weil die Koeffizienten nicht schnell genug gegen Null gehen.

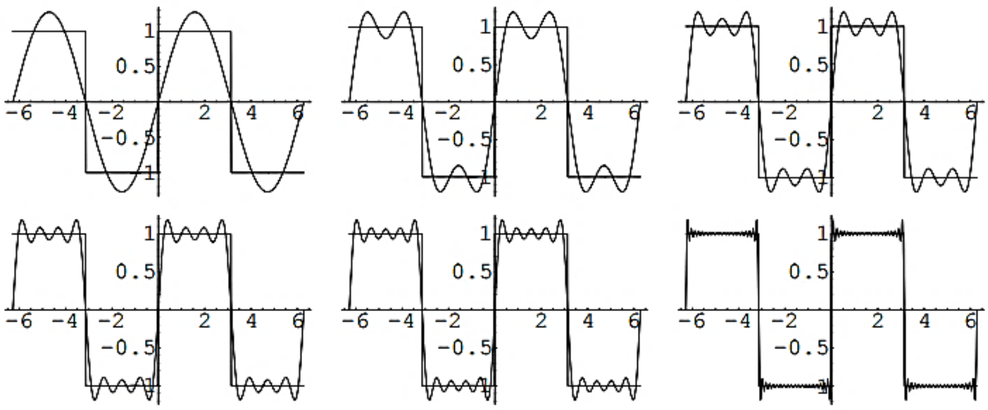


Abb. 3-4
Gibbs'sches Phänomen[13]

Fouriersynthese der Rechteckschwingung für k = 1, 2, 3, 4, 5, 20.

Aus der Signaltechnik ist bekannt, dass Rechteckimpulse nicht lotrecht ansteigen, sondern eine gewisse Zeit bis zum Erreichen des Maximums benötigen. An den Impulsecken entstehen Verrundungen.

[12] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Funktionsgenerator
[13] Bildquelle: http://www.mathe-seiten.de/fourier.pdf

4 Bestimmung der Fourierkoeffizienzten

Um ein T-periodisches Signal rechnerisch in seine Konstituenten zu zerlegen, müssen die Fourierkoeffizienten bekannt sein. Die Koeffizienten lassen sich auf analytischem Wege bestimmen. Im Unterschied zur Taylorreihe, deren Entwicklungskoeffizienten durch Differenzieren gefunden werden, müssen wir bei der Fourierreihe Integrale verwenden.

Für alle ganzzahligen und von Null verschiedenen Zahlen k gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx = 0 \qquad und \qquad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 0$$

Das Verschwinden der beiden Integrale ist evident, weil sich die positven und negativen Halbwellen resp. deren Flächeninhalte zu Null summieren (Abb. 4-1).

$$A_{res} = A + (-A) = 0$$

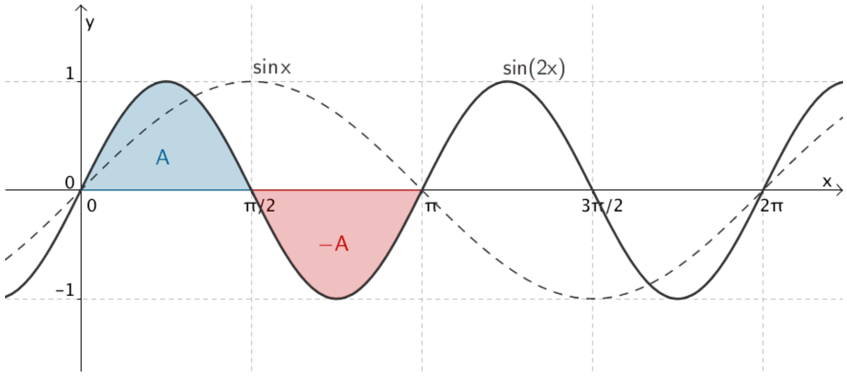


Abb. 4-1
Verschwinden eines Integrals über eine Periode am Beispiel einer Sinusfunktion

Für alle ganzzahligen und von Null verschiedenen Zahlen k und m gilt:

Tabelle 1
Integrale über eine Periode

$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx$	=	0 für k ≠ m π für k = m
$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx$	=	0 für k ≠ m π für k = m
$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(mx)\,dx$	=	0

Im Kontext ist von einer "Orthogonalitäts-Relation" die Rede. Wie beim skalaren Produkt zweier Vektoren **a** · **b** = 0 werden auch zwei Funktionen f · g = 0 als orthogonal bezeichnet. Aus diesem Grunde muss auch das Integral über einer Periode von sin(x) · cos (x) Null sein.

4.1 Berechnung des Gleichanteils a_0

Durch Integration der Fourierreihe nach Gl. (1) über eine volle Periode erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx)\, dx\right] = a_0 2\pi$$

Übrig bleibt nur der Gleichanteil, weil die Integrale der Summe verschwinden. Daraus folgt für das konstante Glied:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

4.2 Berechnung der Koeffizienten a_k

Ausgehend von Gl. (1) – wobei m als Index verwendet wird – erhält man durch Multiplikation mit cos(kx) und anschliessender Integration über eine Periode:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\, dx &\\ &= a_0 \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(kx)\, dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(kx)\, dx = a_m\pi\end{aligned}$$

Das Resultat ist evident, weil gemäss Tabelle 1 alle Integrale bis auf ein einziges verschwinden.

Für m = k erhält man:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, cos(kx) dx = \pi$$

Daraus folgt für die Koeffizienten der Cosinusglieder:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\, dx$$

4.3 Berechnung der Koeffizienten b_k

Multipliziert man Gl. (1) mit sin(kx) und integriert anschliessend über eine volle Periode, so erhält man in adäquater Weise für die Koeffizienten der Sinusglieder:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\, dx$$

Damit sind alle Koeffzienten der Fourierreihe bestimmt.

5 Praxis der Fourierreihenentwicklung

5.1 Gerade und ungerade Funktionen

Die Mathematik kennt gerade (d.h. symmetrische) und ungerade (d.h. antisymmetrische) Funktionen.

Gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$ Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$

Gerade Funktionen sind achsensymmetrisch zur Ordinate, ungerade Funktionen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (Abb. 5-1). Cosinusfunktionen gehören zu den geraden, Sinusfunktionen zu den ungeraden Funktionen.

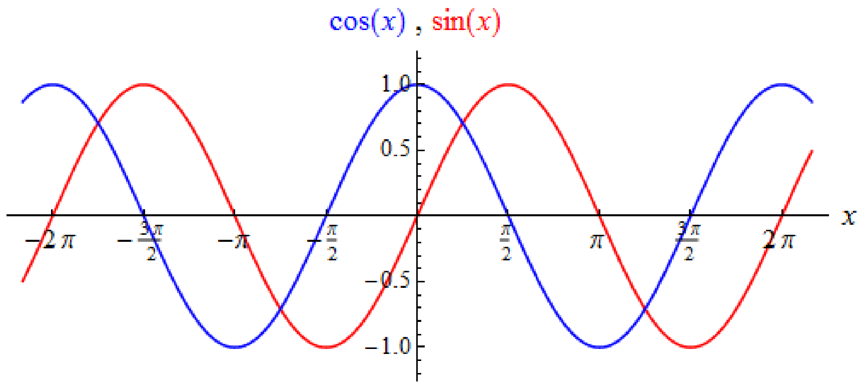


Abb. 5-1
Cosinus und Sinus als Beispiel von geraden und ungeraden Funktionen.[14]

Desweiteren gilt:

- Das Produkt zweier symmetrischer Funktionen ist symmetrisch.
- Das Produkt zweier antisymmetrischer Funktionen ist symmetrisch.
- Das Produkt einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktionen ist antisymmetrisch.

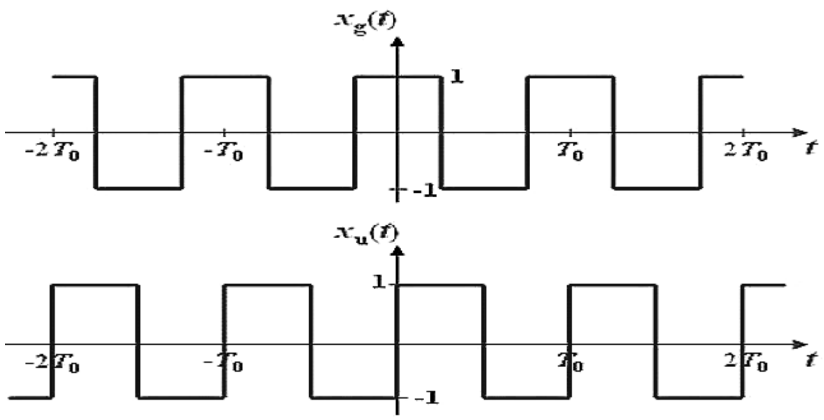


Abb. 5-2
Phasenverschobene Rechtecksignale als gerade und ungerade Funktionen[15]

Die in Abb. 5-2 gezeigten Signale unterscheiden sich nur durch ihre Phase. Die Amplituden

[14] Bildquelle: http://www.mathe-online.at/
[15] Bildquelle: http://www.lntwww.de/Signaldarstellung.html

beider Signale sind gleich gross, aber um $T_0/4$ auf der Zeitachse gegeneinander verschoben. Weil das obere Signal durch eine eine gerade Funktion beschreibbar ist, enthält seine Fourierreihe nur Cosinusterme. Das untere Signal ist ungerade und enthält nur Sinusterme.

Etwas komplizierter wird es bei Signalen, die sich aus geraden und ungeraden Funktionen zusammensetzen und zudem einen Gleichanteil enthalten.

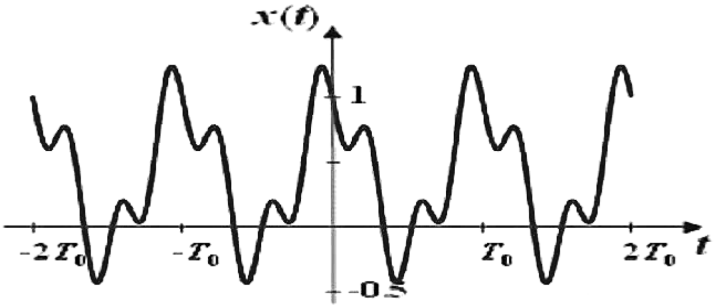


Abb. 5-3
Mischsignal mit Gleichanteil[16]

Weil sich das Signal in Abb. 5-3 aus geraden und ungeraden Funktionen konstituiert, enthält die Fourierreihe Cosinus- und Sinusglieder.

$f(t) = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0{,}3 \cdot \sin(3\omega_0 t)$

Für den Gleichanteil resultiert ein Betrag von $a_0 = 0{,}4$.

Fazit: Durch geschicktes Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften periodischer Signale bieten sich oft einfachere Lösungswege an.

Wegen der Periodizität des Integranden lassen sich die Integralgrenzen – bei gleichbleibender Intervallbreite – bei Bedarf verschieben.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)dx$$

In der Regel wird aus praktischen Gründen das Periodenintervall [-π, π] gewählt.

5.2 Berechnungsbeispiele

5.2.1 Entwicklung eines Rechtecksignals in eine Fourierreihe

Eine Funktion mit den nachfolgenden Parametern (Abb. 5-4) bezeichnet man als Rechteckschwingung.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = -\pi, 0, \pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

[16] Ebenda

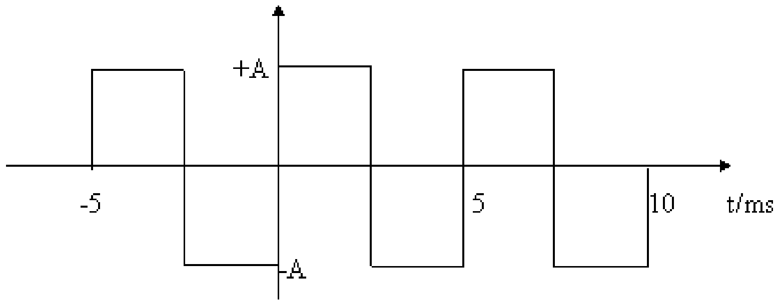


Abb. 5-4
Bipolare Rechteckschwingung, spiegelsymmetrisch zur Ordinate

Weil die Funktion ungerade ist und auch kein Gleichanteil existiert, bleiben nur die Koeffizienten der Sinusterme übrig.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k} - \frac{\cos(k\pi)}{k}\right)$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{k gerade} \\ 4/\pi k & \text{k ungerade} \end{cases}$$

Die Fourierreihe der Rechteckschwingung lautet somit:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\,x}{2k-1}$$

5.2.2 Entwicklung eines Dreiecksignals in eine Fourierreihe

Eine Dreieckschwingung (Abb. 5-5) erhält man z.B. mit der Betragsfunktion f(x) = |x|.

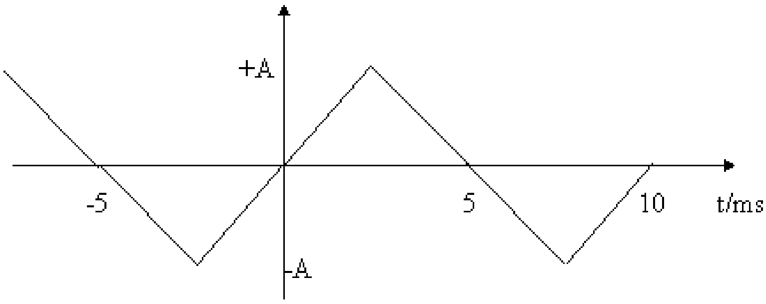


Abb. 5-5
Bipolare Dreieckschwingung, punktsymmetrisch zum Nullpunkt

Der Gleichanteil berechnet sich wie folgt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \pi$$

Weil die Funktion gerade ist, bleiben nur die Koeffizienten der Cosinusterme übrig.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{k gerade} \\ -4/\pi k^2 & \text{k ungerade} \end{cases}$$

Die Fourierreihe einer Dreieckschwingung lautet somit:

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} -1^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$$

5.2.3 Entwicklung eines Sägezahnsignals in eine Fourierreihe

Eine Funktion mit den nachfolgenden Parametern (Abb. 5-6) bezeichnet man als Kipp- oder Sägezahn-schwingung.

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

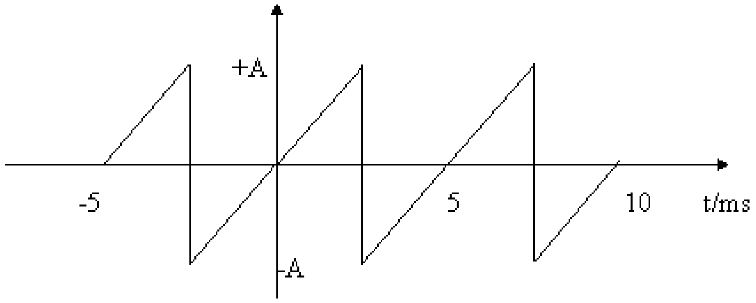


Abb. 5-6
Bipolare Sägezahnschwingung, punktsymmetrisch zum Nullpunkt

Weil die Funktion ungerade ist und im vorliegenden Beispiel kein Gleichanteil existiert, bleiben wiederum nur die Koeffizienten der Sinusterme übrig.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k}\right) = 2\left(\frac{-1^{k+1}}{k}\right)$$

Die Fourierreihe einer Kippschwingung bzw. eines Sägezahns lautet somit:

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} -1^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$$

Weitere Beispiele sind der Fachliteratur zu entnehmen.

6 Fachliteratur

Tilmann Butz: Fouriertransformation für Fussgänger (Vieweg + Teubner)

Hubert Weber, Helmut Ulrich: Laplace-, Fourier- und z-Transformation (Vieweg + Teubner)

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd. 2 (Springer Vieweg)