Helle Köpfe – Mathematiker unter ihresgleichen

Obwohl ein überzeugter Verfechter des Leibniz'schen *Theoria cum praxi* (und beruflich in der physikalischen Technik verankert), verfolge ich ab und zu gewisse Entwicklungen in der reinen Mathematik.

1 Fermats Letzter Satz

Während Jahrzehnten, ja Jahrhunderten, bereitete eine von Fermat (1607-1665) flüchtig an den Rand einer Buchseite der ARITHMETICA des Diophantos gekritzelte Notiz den Mathematikern grösstes Kopfzerbrechen.

> *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*
>
> Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate oder allgemein eine Potenz grösser als die zweite in zwei ebensolche Potenzen zu zerlegen. Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.

Sogar der "Princeps Mathematicorum", Carl Friedrich Gauss (1777-1855), scheiterte am Problem und tat zumindest so, als ob es nicht wichtig genug wäre. Lange Zeit sah es überhaupt so aus, als ob "Fermats letzter Satz" nicht zu beweisen wäre, möglicherweise sogar zu den unentscheidbaren Sätzen (Gödel) gehörte. Heute wird angenommen, dass Fermat den Beweis für einen Spezialfall (n = 4) gefunden hatte, von dem er glaubte, ihn verallgemeinern zu können.

Eigentlich geht es im Kontext um eine an sich banale Gleichung:

$$x^n + y^n = z^n$$

In Worten:

Diese Gleichung hat keine ganzzahligen Lösungen für n > 2. Oder anders gesagt: Gibt es rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen? Das ist der Kerninhalt des Fermatschen Theorems.

Schliesslich meisterte ein begabter Mathematiker – Andrew Wiles mit Namen – während einer siebenjährigen selbstauferlegten Askese das Problem, indem er zunächst die Taniyama-Shimura-Vermutung (alle elliptischen Kurven sind modular) bewies. Damit hatte er zugleich auch "Fermats letzten Satz" bewiesen. Die beschwerliche Reise führte durch das Gebiet der elliptischen Funktionen bis zu den Modulformen und zum Duell mit dem Unendlichen.[1]

Niemand von Wiles Kollegen ahnte auch nur das Geringste, bis das Geheimnis im Jahre 1993 gelüftet wurde. Wiles handhabte virtuos das Instrumentarium der modernen Mathematik,

[1] http://math.stanford.edu/~lekheng/flt/wiles.pdf

darunter die *Iwasawa-Theorie* (die als ein Verfahren zur Analyse elliptischer Gleichungen bekannt ist). Zunächst schien Wiles den Kampf zu verlieren, doch dann wurde er von seinem einstigen Doktorvater, John Coates, auf die *Kolywagin-Flach-Methode* hingewiesen, worauf er die Iwasawa-Theorie zugunsten dieser neuen Methode aufgab.

Nachdem Wiles (1994) seine Vortragsreihe in Cambridge beendet hatte, wurde das Wolfskehl-Kommitee verständigt, welches den von Wolfskehl (1908) ausgesetzten Preis (ursprünglich 100'000 Goldmark) zu vergeben hatte. Doch alsbald zeigte sich eine gravierende Lücke im Beweisverfahren. Davon wussten glücklicherweise nur die Gutachter, unter ihnen Katz und Ribet. Doch lange liess sich das Debakel nicht geheimhalten. In den Kreisen der Mathematiker verbreitete sich zunehmends die Enttäuschung und Wiles Jugendtraum verwandelte sich in einen bösen Alptraum. Schliesslich gelang es, den Fehler zu korrigieren und damit den Beweis zu retten. Wiles erlebte gewissermassen eine Form der Eingebung, als er in einem luziden Moment erkannte, dass die Iwasawa-Theorie allein unzulänglich war. Die Kolywagin-Flach-Methode für sich allein ebenso. Doch zusammen ergab sich die rettende Synthese. Nun hatte die Mathematikergemeinde endlich Grund zu feiern.

2 Die Poincaré-Vermutung

A. Der Beweis

Diese Vermutung, welche nach dem Urteil namhafter Mathematiker (unter ihnen Tian, Kleiner und Lott) von Grigorij J. Perelman im Jahre 2002 bewiesen wurde, führt uns tief in die Topologie und letztlich zur Frage nach der Gestalt der Welt. Der ursprüngliche Beweis enthielt zwar geringfügige Fehler, die aber durch Dritte repariert werden konnten. Die Gruppe um Prof. Yau (bekannt für die in den Stringtheorien auftauchenden Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten) war der Ansicht, dass für einen vollständigen Beweis noch viel zu tun wäre, Perelman aber die Hauptarbeit geleistet habe. Perelman hatte seinen Beweis (den er in einem Preprint auf dem Dokumentenserver arXiv.org plaziert hatte) dermassen gut versteckt, dass die Kollegen ersteinmal nachfragen mussten, um sich zu vergewissern. Die Anfrage eines westlichen Kollegen, ob Perelman etwa die Poincaré-Vermutung bewiesen haben, wurde mit einem knappen "That’s correct" beantwortet. Der russische Mathematiker hielt danach eine Reihe von Vorträgen, am MIT und in Stony Brook (State University of New York), wobei er dem Ricci-Fluss eine zentrale Bedeutung einräumte:

$$\delta(g_{ik}) = -2$$

Hinter dieser für den Laien unscheinbaren Gleichung verbirgt sich eine Landschaft voller Geometrie. Die Gleichung beschreibt eine zeitliche Veränderung der Metrik mit der Folge, dass sich die Mannigfaltigkeit dort, wo die Ricci-Krümmung groß ist, zusammenzieht und dort, wo sie klein ist, ausdehnt. Als Grenzfall bildet sich eine Metrik konstanter Krümmung aus. Der Prozess gleicht dem Wärmefluss in einem Körper. Untersucht wurde der Ricci-Fluss insbesondere von Hamilton (1982), welcher zu zeigen vermochte, dass für eine gegebene Anfangsmetrik positiver Krümmung der Ricci-Fluss eine zeitlang existiert. Für 3-Mannigfaltigkeiten, wo eine Anfangsmetrik mit positiver Krümmung zugelassen ist, erbrachte Hamilton zudem den Nachweis, dass auf ihnen der Ricci-Fluss zu einer Metrik konstanter positiver Schnittkrümmung konvergiert. Daraus folgt, dass diese Mannigfaltigkeit entweder die 3-Sphäre oder allenfalls ein Quotient daraus sein muss. Die von Perelman entwickelte Methode erlaubt indessen auch die Behandlung von Singularitäten des Ricci-Flusses. Der Fluss kann angehalten und an einer anderen Stelle wieder in Gang gesetzt werden. Dazu wird die Umgebung der Singularität abgeschnitten und durch eine Kappe (eine 3-dimensionale Hemisphäre passender Grösse) ersetzt. Auf dieser Halbsphäre lässt man den Fluss dann weiterfliessen. Man nennt diese Prozedur eine Chirurgie zur Zeit T. Damit läst sich der Ricci-Fluss ohne Probleme und innerhalb endlicher Zeit beenden.

- The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications:

  http://arxiv.org/pdf/math/0211159v1

- Ricci flow with surgery on three-manifolds:

  http://arxiv.org/pdf/math/0303109v1

- Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds:

  http://arxiv.org/pdf/math/0307245v1

Perelman wurde für seine bahnbrechende Arbeit die "Fields Medaille" – eine der höchsten Auszeichnungen in der Mathematik – zugesprochen, deren Entgegennahme der zurückgezogen lebende Wissenschaftler jedoch aus persönlichen Gründen ablehnte. Denn im Grunde genommen ging es Perelman um viel mehr, nämlich um die Geometrisierungsvermutung selbst, und dabei mochte er sich nicht durch weltliche Umtriebe von seinem Ziel ablenken und zur gefeierten Gallionsfigur machen lassen. Als Spezialfall folgt die Poincaré-Vermutung aus der allgemeineren Vermutung der Geometrisierung von 3-Mannigfaltigkeiten. An der Preisverleihung in Madrid (2006) glänzte Perelman durch demonstrative Abwesenheit. Nach der Bekanntmachung herrschte eine zeitlang betretenes Schweigen. Einer Reporterin der britischen "Sunday Telegraph" diktierte der aussergewöhnliche Denker lakonisch: *Ich denke nicht, dass ich irgendetwas zu sagen hätte, das von geringstem öffentlichem Interesse wäre...* In Interviews mit Sylvia Nasar vom "New Yorker" sagte er, dass er von den ethischen Standards der Mathematikerwelt enttäuscht sei und deshalb nichts mehr mit der Community zu tun haben wolle. Auch an dem durch das Clay-Institut ausgelösten Preis von 1 Mio. US-Dollar bekundete der Genius kein Interesse. Als Voraussetzung für das Preisgeld hätte er seinen Beweis in einer renommierten Fachzeitschrift veröffentlichen müssen, was offensichtlich seinen Gepflogenheiten widersprach. Nachdem "Grisha" auch seine Stellung beim Steklow-Institut in St. Petersburg gekündigt hatte, ist er arbeitslos und lebt zusammen mit seiner Mutter von den Ersparnissen.

B. Die 3-Sphäre

Nach dieser ungewöhnlichen Einleitung sind wir beim eigentlichen Kernthema, der 3-Sphäre und ihrer Topologie, angelangt. Die von Poincaré erhobene Vermutung besagt im Kontext nämlich nichts Geringeres als:

Eine kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Unter "homöomorph" versteht man im Kontext, dass zwei Objekte durch Dehnen, Stauchen, Verbiegen oder Verdrillen ineinander überführbar sind ohne dass sie dabei zerreissen. So ist bspw. eine Henkeltasse homöomorph zu einem Donut.

Kurz ausgedrückt ist eine 3-Mannigfaltigkeit ein topologisches Objekt, das sich in der Umgebung jedes Punktes auf der Mannigfaltigkeit wie ein 3-dimensionaler euklidischer Raum präsentiert. Um zur Kugel überzuleiten ist eine 2-Sphäre der Rand dieser Kugel. Die Sphäre selbst ist jedoch ohne Begrenzung (als Flächenwesen könnte man sie endlos umrunden, obwohl sie endlich ist). Eine 2-Sphäre erhält man dadurch, indem zwei Kreisflächen an ihren Rändern zusammengefügt und das dadurch entstehende Gebilde "aufgeblasen" wird. Eine 3-Sphäre entsteht demzufolge durch das Aneinanderfügen der Oberflächen zweier Kugeln, Punkt-für-Punkt. Es entsteht eine Hyperkugel in n = 4 Dimensionen. Die 3-Sphäre ist folglich ein in sich geschlossener Raum der Dimensionszahl (n - 1 = 3), welcher den Rand einer Hyperkugel (n = 4) bildet. Die Visualisierung will dem Schreibenden – obwohl bereits viele Nachtstunden dafür opfernd – selbst nach drei Krügen Weissbier nicht gelingen (und ein vierter Krug läge in Reichweite).

Die 3-Sphäre ist demnach die Menge aller Punkte im vierdimensionalen Hyperraum, die der folgenden Gleichung genügt:

$$S^3 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Wie sich eine beliebige Sphäre S_n (im einfachsten Fall ein Kreisumfang) berechnen lässt, findet der Leser z.B. bei Wolfram (dazu den *Mathematica Player* installieren).[2]

Interessant ist m.E., dass die räumliche Ausdehnung einer Sphäre ab n > 7 rapide abnimmt, so dass höhere Existenzformen, die somit auf eine natürliche Weise kompaktifiziert wären, nicht von Vornherein auszuschliessen sind.

In einfachen Worten und sinngemäss ausgedrückt fordert die Poincaré-Vermutung also:

Suche und beweise die Homöomorphie der 3-Mannigfaltigkeit zur 3-Sphäre wobei gilt, dass jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, in welcher sich alle Schleifen stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen, homöomorph zu S^3 ist. Jede geschlossene Kurve, etwa ein Seil, auf der (randlosen) Oberfläche einer Kugel lässt sich bekanntlich zu einem Punkt zusammenziehen (welcher auch auf der Kugel liegt). Man spricht von einem "einfach zusammenhängenden" Körper. Bei einem Torus, wo das Seil durch das Loch geführt wird, wäre das nicht möglich.

Für den Fall einer Sphäre mit n = 2 ist die Aussage längst bewiesen (Satz von Gauß-Bonnet, Gaußsche Flächentheorie). Ebenso für n > 7 (Smale, 1961). Zeeman (1961) bewies den fünfdimensionalen Fall. Stallings (1962) bewies die sechsdimensionale Variante. Der Fall n = 4 wurde inzwischen auch bewiesen durch Friedmann (1982). Am Schwierigsten erwies sich jedoch die 3-Sphäre. Perelman (2002) nun erbrachte den Beweis auch für diesen von Poincaré explizit ins Auge gefassten Kardinalfall.

Mittels des vollbrachten Beweises lässt sich festhalten:

Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe trägt eine sphärische Struktur. Damit kann sie mit einer schönen geometrischen Struktur, d.h. mit einer Riemann'schen Metrik

[2] http://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html
http://mathworld.wolfram.com/Sphere.html

versehen, werden, was auch für den Physiker vorteilhaft ist.

Für den Kosmologen von Interesse ist bspw. eine Reise durch den Kosmos. Nach Hawkings befinden wir uns – unter Einbezug der Zeitdimension – in einem 5-dimensionalen Universum, auf dessen 3-Sphäre wir räumlich angesiedelt sind. Eine intergalaktische Reise durch den Ortsraum, immer geradeaus, müsste uns nach endlicher Zeit an den Ausgangspunkt zurückführen; adäquat zu einer Weltumsegelung auf einer kugelförmigen Erde (wobei letztere Bewegung nur auf einer 2-Sphäre, der Kugeloberfläche, stattfindet). Unsere Reise verläuft hingegen auf einer 3-Sphäre (den vierdimensionalen und die Sphäre tragenden Hyperraum als Ganzes nehmen wir mit unseren Sinnen ebenso wenig wahr wie ein Beltramisches Flächenwesen das Innere der Erde).

Unsere Reise auf der 3-Sphäre führt uns aus der "Totalebene der Welt" (welche nach E. Barthel[3] mit einer *Lambertschen Münze*[4] zu vergleichen ist) nach oben. Schliesslich gelangen wir zum Obenpol einer Maximalkugel, um danach abwärts gehend zum Untenpol zu gelangen. Adäquat wie es auf der 3-dimensionalen Erdkugel einen Nord- und einen Südpol gibt, findet sich auf der Hyperkugel ein Oben- und ein Untenpol, so dass die Reise letztlich in sich selbst zurückläuft.

C. Die Gestalt der Erde

So selbstverständlich uns heutigen die 3-Kugel (Globus) und deren 2-Sphäre (Atlas) ist, war es beileibe nicht immer. Zwar war bereits vor Eratosthenes (276-194) die Kugelgestalt der Erde bekannt (die Erde als Scheibe kursiert nur noch in den Köpfen naiver Menschen). Die Pythagoräer wussten bereits Bescheid darüber. Auch in der Bibel wird die Kugelform erwähnt. Doch die exakte Gestalt war lange Zeit unbekannt. Heute sprechen wir von einem Geoid.

Kolumbus bspw. dachte noch an eine Birne, wobei die südliche Hemisphäre dem Bauch und die nördliche dem in den Stil auslaufenden Teil entsprach. Für den Seefahrer war somit klar, dass eine Schiffsreise nach Indien über die nördliche Route erheblich kürzer ausfallen musste als eine über das Kap Horn herum. Doch diese Vorstellung erwies sich letztlich als ebenso irrig wie diejenige der Cassinischen Kurven als Planetenbahnen.[5]

Im Grunde genommen wusste man bis zum 18. Jahrhundert nur, dass die Erde kueglförmig ist. Sie hätte ebensogut birnenförmig, apfelförmig oder auch wie ein Donut gestaltet sein können. Birnen und Äpfel sind zueinander homöomorph. Sie lassen sich – Streckung und Stauchung erlaubt – punktweise aufeinander abbilden. Der signifikante Unterschied gegenüber dem Torus ist, dass dieser nicht einfach zusammenhängend ist. Ein Seil, das durch den Torusring geschlungen wird, lässt sich nicht bis auf einen Punkt zusammenziehen. Ein Torus ist folglich

[3] Ernst Philipp Barthel (1890-1953) war ein elsässischer Philosoph, Mathematiker und Erfinder. In den 1920er und 1930er Jahren lehrte er als Privatdozent für Philosophie an der Universität zu Köln.

[4] Johann Heinrich Lambert (1728-1777) hat als genialer Autodidakt die flächentreue Azimutalprojektion entwikkelt, die in der Kartografie ihre Bedeutung besitzt.

[5] Obwohl Johannes Kepler (1571-1630) zu seiner Zeit bereits die elliptischen Bahnen proklamiert hatte, vertrat ein ansehnlicher Teil der astronomischen Zunft weiterhin die Idee von Cassini. Isaac Newton (1642-1726) hingegen sprach sich für die Keplerellipsen und eine Vollkugelerde aus, welche an den Polen abgeplattet ist. Die Richtigkeit von Newtons Konzeption konnte aber erst viele Jahre später durch die Vermessung des Längengrades erbracht werden.

nicht homöomorph zur Kugel. Die Problematik ist nicht trivial. Auch auf einem Torus (Donut) ist eine Weltumsegelung möglich. Und das sogar in zweifacher Hinsicht. Es gäbe einen langen und einen kurzen Weg. Auch ein Torus kann rotieren und das Foucault'sche Pendel ausschlagen lassen.

Die Poincaré-Vermutung steht am Ende eine Reihe von Arbeiten zur *Analysis Situs*, die Poincaré zwischen 1895 bis 1904 durchführte. Es gab seinerzeit auch kritische Stimmen wie diejenige von Heegaard. Das Thema hat die algebraische Topologie zum Inhalt. Doch dazu müssen wir nochmals etwas weiter ausholen:

Nehmen wir bspw. eine Weltkarte bzw. deren zwei, welche die Welt ohne die Pole abbilden. Nun kleben wir die Karten oben und unten zusammen, so dass ein Zylinder entsteht. Danach kleben wir die verbleibenden Seiten zusammen, so dass daraus ein Torus resultiert. Wie können wir nun mit Gewissheit behaupten, die Erde sei eine Kugel? Wir verstehen jetzt vielleicht auch die unterschwellige Bedeutung, die der Eroberung der Pole zugrunde lag. Es ging dabei nicht nur um den sportlichen Wettkampf, sondern letztlich um die endgültige Beantwortung der Frage nach der Gestalt der Erde. Dazu mussten aber erst Karten angefertigt werden und das bedeutete: Erdvermessung vor Ort. Heute, wo Satelliten die Erde umkreisen und wir den Anblick der Erde aus dem Weltraum kennen, ist das nur noch schwer nachvollziehbar.

Empirisch gehen wir von stillschweigenden Voraussetzungen (Axiomen) aus wie z.B., dass sich Lichtstrahlen geradlinig in den Raum erstrecken. Wäre es anders, so lägen Objekt und Visierlinie nicht auf derselben Geraden und wir kämen zwangsläufig zu falschen Schlussfolgerungen (es sei denn, wir wüssten um die wahre Gestalt der Erde Bescheid). Topologie und Metrik spielen bei unseren Betrachtungen demzufolge eine wichtige Rolle. Man denke nur an die Poincarésche Kreisscheibe oder an das Klein-Beltrami-Modell der hyperbolischen Ebene. Solche Weltgeometrien vermögen uns zu täuschen. Glücklicherweise verhält sich die Erdwelt innerhalb ihres Horizonts wie eine euklidische Ebene, wo das Parallelenpostulat gilt.

D. Poincaré und die Algebraisierung der Topologie

Poincaré befasste sich zeitlebens mit solchen schwierigen Fragen. Bereits sein Briefwechsel mit Klein über die *Fuchs'schen Funktionen* zeugt im Ansatz davon. So war es nicht weiter verwunderlich, dass er auch auf Riemanns Arbeiten über höherdimensionale Mannigfaltigkeiten aufmerksam wurde. Die natürliche Geometrie auf einer Oberfläche wurde unweigerlich zur Obsession. Welche Metrik besitzt bspw. ein Torus mit 3 Löchern? Mit etwas Vorbildung lässt sich ohne Weiteres zeigen, dass man den Torus im euklidischen 4-Raum unterbringen kann, so dass er eine flache Metrik erbt. Insbesondere aber passt ein hyperbolischer zweilöcheriger Torus nicht in den euklidischen 3-Raum. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, jede Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik so einem n-dimensionalen euklidischen Raum einzupassen, dass die Metrik auf der Mannigfaltigkeit dieselbe ist wie die, welche sie vom umgebenden euklidischen Raum erbt. Diese Frage blieb lange Zeit unbeantwortet. Erst Nash (1956) zeigte in einem denkwürdigen Aufsatz, dass die Antwort auf das allgemeine Einbettungsproblem mit "Ja" zu beantworten ist. Nicht allzulange danach machten sich bei ihm erste schizophrene Störungen bemerkbar. Die Beschäftigung mit höheren Mannigfaltigkeiten und auch mit dem Unendlichen birgt manche Gefahren in sich (wovon uns Cantor ein Liedchen singen könnte).

Kennengelernt hatte Poincaré die nichteuklidische Geometrie durch den Ingenieur und Mathematiker Eugenio Beltrami (1835-1900), auf den die Pseudosphäre (eine Oberfläche mit konstant negativer Krümmung) zurückgeht. Die Pseudosphäre entsteht, indem man eine Traktrix (Schleppkurve) um ihre y-Achse rotieren lässt. Ihre Pole liegen im Unendlichen. Ihre Krümmung in jedem Punkt der Sphäre stets -1. Poincaré ging aber über lediglich zwei Dimensionen hinaus, indem er ein Modell des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes erarbeitete. Zwischenzeitlich befasste er sich auch mit einer Preisaufgabe und stiess auf das chaotische Verhalten von Himmelskörpern. Oder er verfasste Grundlagenartikel zum Relativitätsprinzip und gab den von Lorentz entwickelten Transformationen einen Namen. Als Quintessenz drang er aber immer tiefer in die Topologie ein, zu deren Begründern er ja auch zählt.

Eine wichtige Grösse waren die sog. *Betti-Zahlen*, die von Enrico Betti (1823-1892) entdeckt worden waren. Betti-Zahlen sind schlichtweg topologische Invarianten, welche die globalen Eigenschaften eines topologischen Raumes beschreiben. Im Kontext tauchen Homologiegruppen auf. Poincaré vermutete, dass die Homologiegruppen für homöomorphe Mannigfaltigkeiten identisch waren respektive, wenn ersteinmal die Homologiegruppen bekannt waren, kannte man auch die Betti-Zahlen et ultra. Es zeigte sich aber, dass es nicht ausreicht, nur die Betti-Zahlen zu kennen.

Letztlich ging es um die tiefgründige Frage:

Wenn wir in einem Universum leben, das eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, wie können wir dann mit Bestimmtheit sagen, welche Mannigfaltigkeit es ist? Das bedeutet, ob eine 3-Mannigfaltigkeit sphärisch, hyperbolisch oder torisch ist (wie in den 1980er Jahren von Thurston untersucht wurde, welcher die Geometrisierung in Gang gesetzt hat).

Die Thurston-Vermutung (Thurston's geometrization conjecture) lautet sinngemäss:

Dreidimensionale endliche orientierbare Räume können zunächst auf bestimmte Weise in endlich viele kleinere Teilräume zerschnitten werden (es resultieren Kugeloberflächen oder Torus-Oberflächen). Bei dieser Zerlegung entstehen Teilräume (Untermannigfaltigkeiten), die jeweils genau eine von acht möglichen Geometrien aufweisen. Dazu gehört u.a. die euklidische Geometrie, die Geometrie der 3-Sphäre und die dreidimensionale hyperbolische Geometrie sowie exotischere Geometrien (Nil-Geometrie, Sol-Geometrie etc.).

Falls die Geometrisierungsvermutung gilt, sind Mannigfaltigkeiten mit einer endlichen Fundamentalgruppe sphärisch. Zu Beginn des 20. Jh. wusste das keiner mit Sicherheit. Diese Fragen reichen bis weit in die moderne Kosmologie hinein, wie u.a. am Modell des Poincaré-Dodekaeder-Raumes ersichtlich ist. Poincarés Denken kristallisierte sich in der Folge zunehmends an der 3-Sphäre heraus (als einfachster dreidimensionaler Mannigfaltigkeit).

In einem Beitrag äusserte er sich dazu mit den Worten:

> Jeder Polyeder, bei dem alle Betti-Zahlen gleich eins und alle Reihen T_q bilateral sind, ist der dreidimensionalen Sphäre homöomorph.

Damit begann prinzipiell die Geschichte der Poincaré'schen Vermutung; denn das obige Theorem erwies sich als falsch. Es fanden sich Mannigfaltigkeiten, deren sämtliche Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten zwar gleich eins und die trotzdem der 3-Sphäre nicht homöomorph sind.

Mit anderen Worten: Selbst wenn alle diesbezüglichen Betti-Zahlen bekannt wären, wüsste man noch immer nicht die wahre Form des Universums. Schliesslich gipfelte diese Untersuchung in der Frage:

> Ist es möglich, dass die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit die Identität sein könnte, dass diese Mannigfaltigkeit aber vielleicht nicht der dreidimensionalen Sphäre homöomorph sein mag?

Dies ist der eigentliche Kern der Poincaré-Vermutung. Als Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit hatte der Franzose die Menge von Schleifen in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit definiert (wobei zwei Schleifen als dieselben betrachtet werden konnten, wenn sie ineinander umformbar, d.h. "homotop", sind). Die Identität ist dann die Schleife, die an einem einzigen Punkt bleibt und nirgendwo sonst verläuft. Eine Schleife ist demzufolge der Identität äquivalent, wenn sie auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

> ...Man konnte sich offensichtlich eine Gruppe "vorstellen" (imaginer), schrieb Poincaré, so dass jedem geschlossenen Weg durch einen gegebenen Punkt P ein Element der Gruppe entsprach; dass genau die Wege, die stetig in den Basispunkt P zusammengezogen werden konnten, dem Neutralelement der Gruppe entsprachen; und dass jedem Weg, der durch Aneinandersetzen zweier in P beginnender und endender Wege entstand (so dass also von P aus zuerst der erste und danach der zweite Weg durchlaufen wird), die Verknüpfung der beiden Gruppenelemente entsprach, welche diesen Wegen zugeordnet waren. Die drei Bedingungen zusammen implizieren, dass diese Gruppe – von Poincaré die "Fundamentalgruppe" einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit genannt – auch als die Menge der Aequivalenzklassen von stetig ineinander deformierbaren Wegen mit festem Basispunkt, versehen mit der durch das Aneinandersetzen von Wegen induzierten Verknüpfung, erklärt werden kann.
>
> Epple, Die Entstehung der Knotentheorie.

Damit sind wir am Ende dieses Beitrages angelangt. Viele hatten sich an einem Beweis der Poincaréschen Vermutung versucht, u.a. Whitehead in den 1930er Jahren, der seine Arbeit aber später zurückzog. Aehnlich erging es anderen Mathematikern. Wie wir inzwischen wissen, hat Perelman die Aufgabe mit Bravour – wenn auch nur skizzenhaft – gemeistert. Die definitive Ausarbeitung haben andere auf sich genommen.